

2012年度

機械システム応用実験

熱伝導解析の応用実験

当日持参するもの

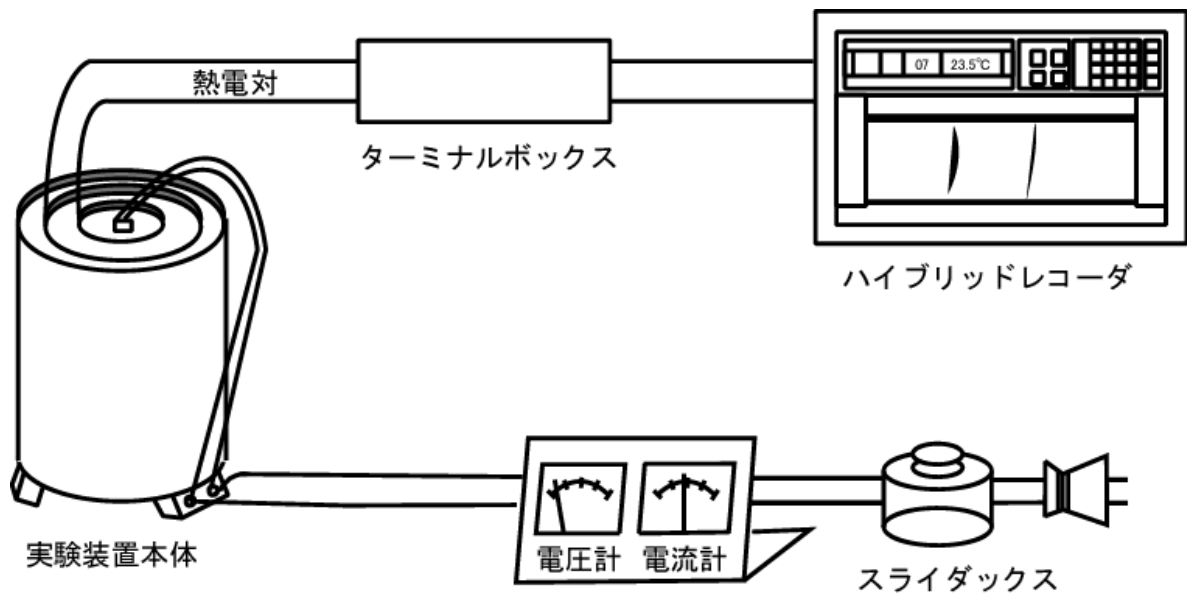
本テキスト，筆記用具，A4方眼紙，ポケットブック，電卓

可能であれば USB メモリ

1. 実験概要

熱の移動と温度分布には密接な関係があり，これを扱う工学の分野を伝熱工学と呼ぶ．伝熱工学の初歩を学ぶために本実験では，内部に熱源を有する円筒を対象として熱伝導解析を行う．図 1.1 に示すのは本実験で用いる実験装置の全体図である．円筒中心軸に沿って埋め込まれたヒーターに電流を流すと，ヒーターが発熱する．この後，その熱はどこに向かって移動するのであろうか？また，円筒内部の温度分布はどのようになるのであろうか？最高温度，最低温度はどこに現れるのであろうか？ヒーターに近い場所ほど温度が高いのは感覚的に理解できるであろうが，詳細な温度分布を知るためにはどのようにしたらよいのであろうか？

本実験では，こうした疑問に答えるために理論，測定および数値シミュレーションを駆使して円筒内部の伝熱解析を行う．



2. 伝熱工学の基礎理論

2.1 熱流束

微小面積 ΔA [m^2]を単位時間に通過する熱量を ΔQ [W]とすると、単位面積・単位時間当たりの通過熱量の大きさは

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (1.1)$$

で表わされる。この q [W/m^2]を**熱流束**という。

熱の移動には、(1)熱伝導、(2)対流熱伝達、(3)放射の3形態があるが、いずれの形態であっても、伝熱解析を行うということはこの熱流束を調べることに他ならない。それだけ重要な量であることを肝に銘じておくこと。以下の節では、本実験に密接に関係する熱伝導および対流熱伝達の場合について熱流束の表現を確認する。

2.2 熱伝導

熱伝導とは、固体内部を熱が伝わっていく現象であり、一般に、**熱流束は温度勾配に比例**することが知られている。すなわち、

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (1.2)$$

と表わされる。これをフーリエの法則といい、熱伝導の基本法則である。比例定数の λ は**熱伝導率** (heat conductivity)と呼ばれる物性値である(物質により異なった値を持つ)。熱伝導率は、物質の熱の伝えやすさを表わす物性値である。

実際の熱伝導では、固体内を様々な向きに熱が移動しているので、熱流束はベクトル量となる。その場合、式(1.2)の常微分を偏微分に代えて、

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.3)$$

とすればよい。

2.3 対流熱伝達

対流熱伝達とは、固体と流体との間に発生する熱移動のことである。本実験では、固体の円筒から空気に向かって熱が移動するので、以下の説明においては流体が空気であることを前提とする。

一様な温度 T_{air} である空気中に固体が置かれており、その固体壁面の温度が T_w のとき、固体から空気に向かう熱流束は、次式により与えられる。

$$q = h(T_w - T_{\text{air}}) \quad (1.4)$$

熱流束は温度差に比例しており、その比例定数 h を**熱伝達率** (heat transfer coefficient) と呼ぶ。熱伝達率 h は熱伝導率 λ と異なり、物性値ではないことに注意が必要である。固体の形状や空気の流速分布により大きく値が変わる。また、重力が熱流束に及ぼす影響は面の向きによっても異なるため、熱伝達率の値を一概に決めることはできない。実験に基づく過去の知見の蓄積があるので、データブックやハンドブックの類を参照して実用的な値を引用するのが熱伝達率の値を知るための近道である。

本実験では、理論計算や数値シミュレーションを行うに当たり以下の簡易的な式を利用して熱伝達率を求めている。

$$h = C(Gr \cdot Pr)^m \cdot \frac{\lambda}{L} \quad (1.5)$$

$$\text{プラントル数: } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.6)$$

$$\text{グラスホフ数: } Gr = \frac{g\beta(T_w - T_{\text{air}})L^3}{\nu^2} \quad (1.7)$$

ただし、 g : 重力加速度、 ν : 空気の動粘度、 α : 空気の熱拡散率、 β : 空気の体積膨張率、 L : 代表長さ、である。 C と m は定数であり、壁の向きにより、

$$\text{垂直壁: } (C, m) = (0.59, 0.25)$$

$$\text{水平な上面壁: } (C, m) = (0.54, 0.25)$$

$$\text{水平な下面壁: } (C, m) = (0.58, 0.2)$$

とする。

なお、対流熱伝達においては熱移動の方向が面の法線方向と決まっているので、熱流束を必ずしもベクトル量として扱う必要はない。

3. 円筒内の一次元熱流れ理論

3.1 一次元熱流れにおける温度分布

図 2.1 のような円筒の中心軸に熱源をおき、温度場が定常になるまで放置する。定常状態では、熱は半径方向 (r 方向) に向かって流れる。つまり、熱は軸中心から放射状に流れて、円周方向 (θ 方向) には流れないと考えてよい。また、円筒が充分長く、発熱量が軸方向 (z 方向) に一様であるならば、 z 方向の熱流れも無視することができる。このように、円筒座標系 (r, θ, z) において r 方向のみに熱が流れるので、一次元熱流れと呼ばれる。

図 3.2 は、二つの半径 r_a, r_b ($r_a < r_b$) にはさまれた部分を円筒からくり抜いた状態を示している (説明のために半分の 180° 分しか図中には示されていないが、実際は手前の部分にも存在している)。このくり抜かれた部分を検査体積 (コントロール・ボリューム、略して CV) とみなして熱の出入り (収支) を考える。

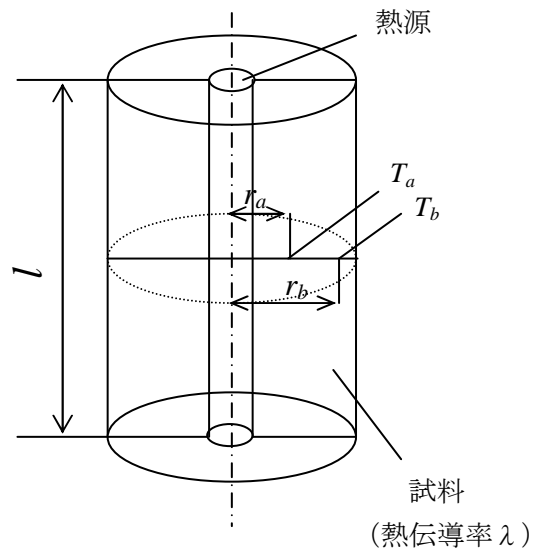


図 3.1 円筒の熱伝導

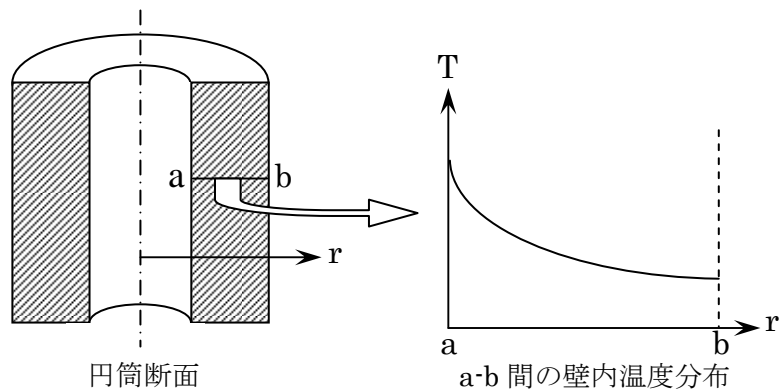


図 3.2 円筒壁内温度分布

熱は半径方向に放射状に流れているから、内側の円筒面（半径 r_a 、面 a と呼ぶ）を通じて熱が CV に流入してくる。CV に流入してくる単位時間当たりの熱量を Q_{in} とすると、

$$Q_{in} = A_a q_a = 2\pi r_a l \left(-\lambda \frac{dT}{dr} \right)_a \quad (3.1)$$

と計算することができる。ただし、 q_a は面 a での熱流束、 A_a は面 a の面積である。一方、CV から熱が流出していくのは外側の円筒面（半径 r_b 、面 b と呼ぶ）からであり、単位時間に流出する熱量を Q_{out} とすると、

$$Q_{out} = A_b q_b = 2\pi r_b l \left(-\lambda \frac{dT}{dr} \right)_b \quad (3.2)$$

と表わすことができる。定常状態では、CV に出入りする熱量は釣り合っているので、

$$Q_{in} = Q_{out} \Leftrightarrow r_a \left(\frac{dT}{dr} \right)_a = r_a \left(\frac{dT}{dr} \right)_a \Leftrightarrow r \frac{dT}{dr} = A \quad (\text{一定}) \quad (3.3)$$

式(3.3)の微分方程式は積分するだけで以下のように簡単に解くことができる。

$$T = A \ln r + B \quad (3.4)$$

ただし、 A と B は未知定数であり、境界条件から具体的な値が決定される。

3.2 本実験の円筒に一次元熱流れを仮定した場合の温度分布

この節では、本実験の円筒に式(3.4)を適用して具体的に温度分布を求める方法について説明する。

未知定数は A と B の2つであることから、これらを決定するためには条件も2つ必要である。1つ目の条件は、ヒーターから試料に与えられる熱量の条件である。ヒーターと試料の固体が接する円筒面の半径を $r = r_1$ とすると、この面を単位時間に通過する熱量 Q_1 は式(3.1)と同じ形式で以下のように表現される。

$$Q_1 = A_1 q_1 = 2\pi r_1 l \left(-\lambda \frac{dT}{dr} \right)_1 \quad (3.5)$$

式(3.3)より

$$r_1 \left(\frac{dT}{dr} \right)_1 = A \quad (3.6)$$

であるから、結局式(3.5)は以下ようになる。

$$Q_1 = -2\pi \lambda l A \quad (3.7)$$

定常状態を考えれば、熱量 Q_1 はヒーターから単位時間に発生する熱量と等しいから、式(3.7)より簡単に未知定数 A を求めることができる。

2つ目の条件は、円筒外壁面における空気への放熱条件である。円筒外壁面の半径を $r = r_2$ とすると、

$$Q_2 = A_2 q_2 = 2\pi r_2 l \cdot h (T_2 - T_{air}) \quad (3.8)$$

と表される。熱流束 q_2 の表現には、壁面の温度を $T_w = T_2$ として熱伝達の式(1.4)を用いている。熱量 Q_2 は当然 Q_1 と等しく、空気温度 T_{air} も既知であるから、式(3.8)を利用して T_2 を求めることが可能である。ただし、熱伝達率 h を式(1.6)より求める際に温度 T_2 の値が必要になる。そこで、適当な T_2 の予測値を式(1.6)に代入して h を計算→式(3.8)に代入して T_2 を計算→式(1.6)に代入して h を計算→…という代入計算を値が収束するまで交互に繰り返すことで正しい温度 T_2 を求めることができる。

半径 $r = r_2$ のとき、 $T = T_2$ であることを式(3.4)に代入すれば

$$T_1 = A \ln r_2 + B \quad (3.9)$$

であり、 A は既知であることから B も計算することができる。

3.3 温度分布の計算

前節で述べた方法により，円筒内の一元熱流れを仮定した温度分布の式を求めよ．条件には以下の値を用いること．

プラントル数 $Pr=0.7$ ，重力加速度 $g=9.81[\text{m/s}^2]$ ，体積膨張率 $\beta=0.003[1/\text{K}]$ ，空気の粘性係数 $\mu=1.83 \times 10^{-5} [\text{Pa} \cdot \text{s}]$ ，空気密度 $\rho=1.185 [\text{kg/m}^3]$ ，空気の熱伝導率 $\lambda_{\text{air}}=0.0241 [\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$ ，供試体（砂）の熱伝導率 $\lambda=0.35 [\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$ ，代表長さ(円筒全高) $L=l=350[\text{mm}]$ ，ヒーターの半径 $r_1=6[\text{mm}]$ ，円筒外壁の半径 $r_2=160[\text{mm}]$

空気温度 T_{air} とヒーターからの供給熱量 Q_1 は実測値を用いること．

4. 円筒内部温度の実測

第 3 章で述べた一次元熱流れの理論通りに実際の熱流れが起こっているという保証はない．そこで，図 4.1～4.3 に示す位置に熱電対を埋め込んで実際の温度を測定する．これらの測定値と一元理論値はどの程度一致しているか考察せよ．特に両者の違いは何が原因で生じたものであるか詳細に論じること．

なお，熱電対の測定原理については付録を参照のこと．

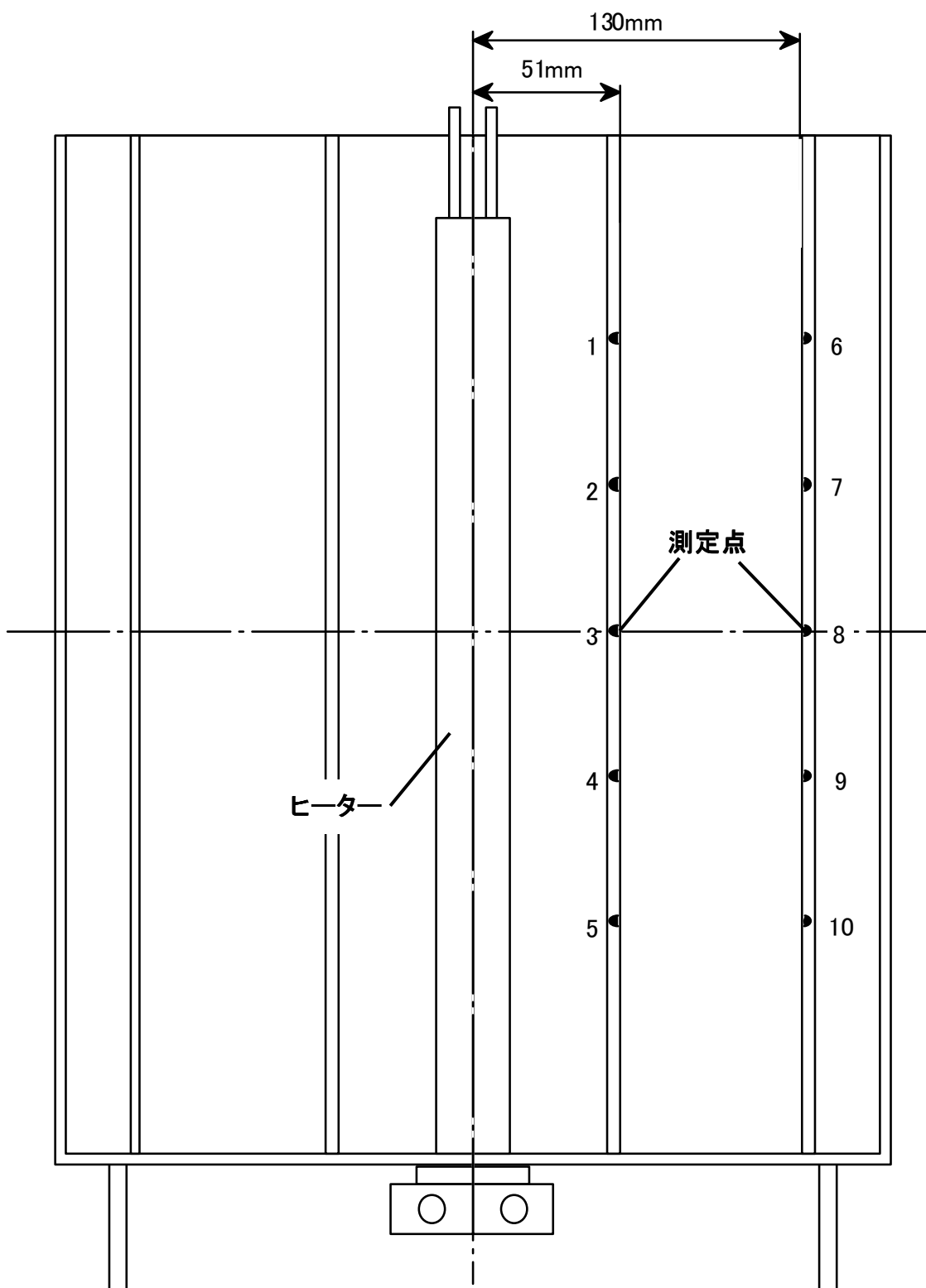


図 4.1 内部発熱する円筒内に設けられた測定点（円筒中央断面）

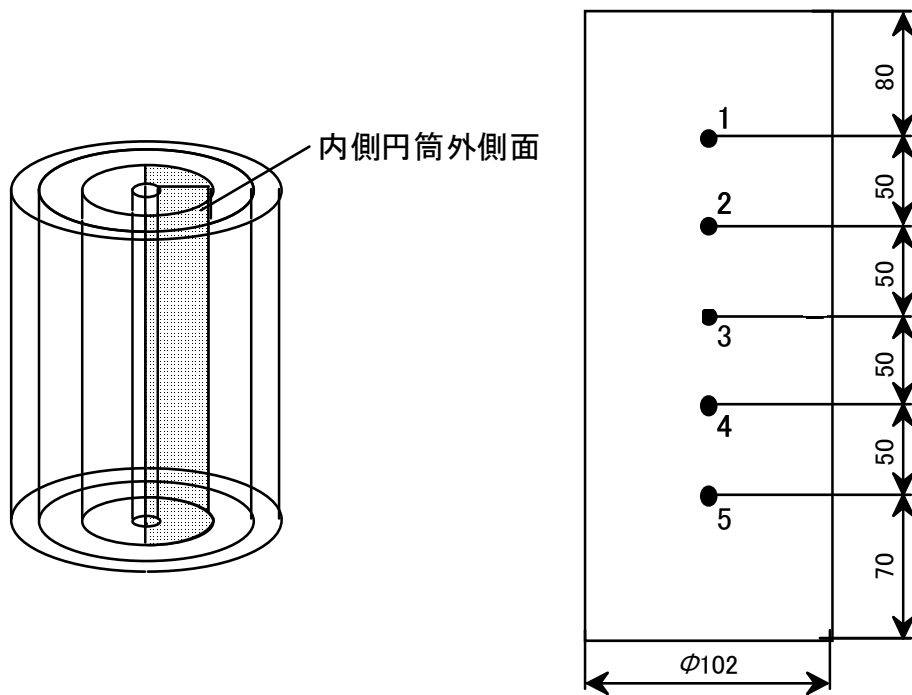


図 4.2 円筒内半径 51mm に位置する測定点 (側面図)

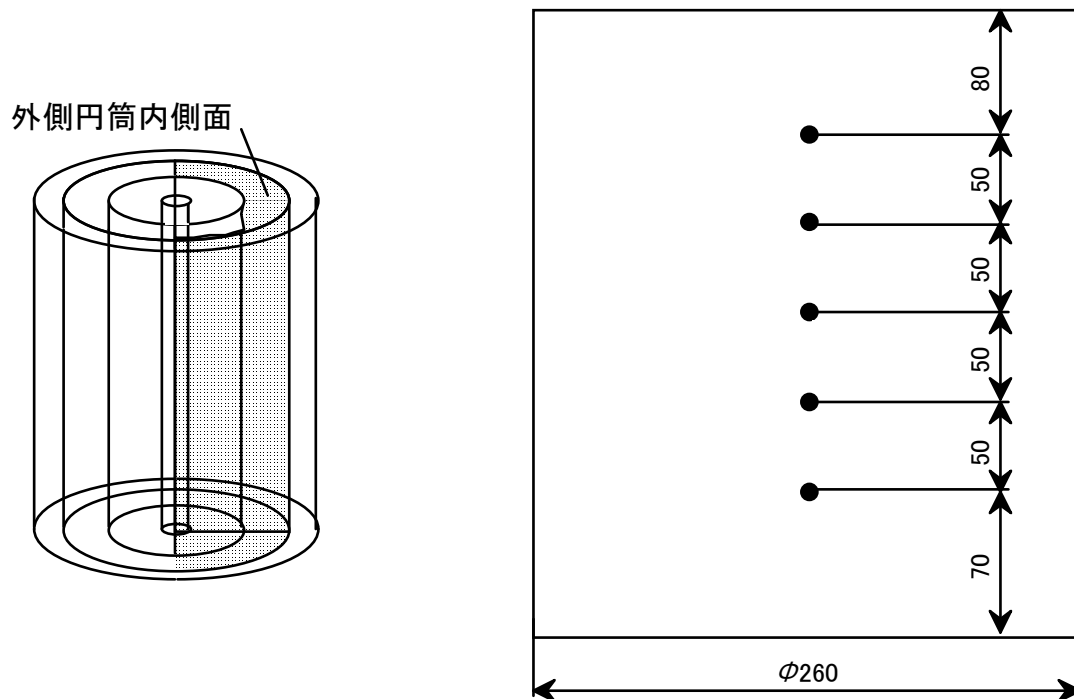


図 4.3 円筒内半径 130mm に位置する測定点 (側面図)

5. 数値シミュレーション

5.1 二次元熱伝導方程式の数値的解法概要

第4章では一次元熱流れの仮定を行い温度分布の式を導出したが、このとき周方向 θ と高さ方向 z には熱が流れないと仮定していた。しかし実際には、熱流れが完全に一次的になることはまずあり得ない。本実験で用いる円筒においては、上面と底面に断熱材を敷き詰めて、高さ方向の熱流れを抑止するように努めているが、それでも完全に高さ方向の熱流れをゼロにすることは不可能である。

より実現象に即した多次元熱流れの熱伝導について考えるときは、熱伝導方程式を用いる。熱伝導方程式は、デカルト座標系において、

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{in} \quad (5.1)$$

と与えられる（微分が常微分ではなく偏微分が変わっていることに注意）。なお、 q_{in} は単位体積当たり単位時間の発熱量 [W/m³]である。この方程式を円筒座標系における表現に変換したものが次の式(5.2)である。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{in} \quad (5.2)$$

本実験では定常状態を考えるので、式(5.2)左辺の時間微分項は0である。また、発熱しているのはヒーターだけであり、解析対象とする領域内での発熱はないので $q_{in} = 0$ である。さらに円筒の幾何形状から考えて θ 方向の対称性（軸対称性）は成立すると考えてさしつかえないから、 θ 方向の微分は0とみなすことができる。これらの条件をすべて式(5.2)に代入すると結局、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.3)$$

ただし、両辺に r を乗じて分母を払っている。

もしも高さ方向(z 方向)の微分も0であると仮定すると、一次元理論で考えていた式(3.3)と全く同じになる。つまり、式(5.3)では高さ方向の熱流れも考慮されている点で、一次元理論と比べて大きく異なっている。もちろん二次元の熱流れを考慮している式(5.3)を用いた方が、より実現象に近い温度分布を表現できるはずである。

式(5.3)において、 λ が定数ならば微分の()の外に出して、両辺を λ で割って消去することができる。しかし、円筒は砂の他に断熱材のグラスウール、底面・側面および熱電対埋め込み用の板に用いられているアルミニウムなど複数の材料が混在していることに注意が必要である。これら異種材料は互いに異なる熱伝導率をもつので、同一材料で構成されている場合とは異なる温度分布になるはずである。式(5.3)において λ を消去せずに残しておけば、異種材料が混在する状況にも対処することができる。

このように熱伝導方程式は、多次元熱流れや異種材料混在など多くの実用的な熱伝導問題に適用することができる便利なものである。しかしながら、**厳密解を求めることができない**という最大の難点がある。そこで、式(5.3)をコンピュータによる数値解析によって近

似的に解くという方法を取る。

まず、図 5.1 のように領域を長方形の形をした小さなコントロール・ボリューム (CV) に分割し、それぞれの CV の中心に温度 T を定義する。図 5.1 では長方形の中心に描画されている○が温度定義点である。今、色の塗ってある CV に着目することにして、この中心点に P という名前をつけよう。この CV の上下左右にある CV の中心点にもそれぞれ N, S, W, E と名を付ける。P を中心とする CV において式(5.3)の近似式を立てると、

$$\Delta z \left[r_e \left(\lambda \cdot \frac{T_E - T_P}{\Delta r_e} \right) - r_w \left(\lambda \cdot \frac{T_P - T_w}{\Delta r_w} \right) \right] + \Delta r r_p \left[\left(\lambda \cdot \frac{T_N - T_P}{\Delta z_n} \right) - \left(\lambda \cdot \frac{T_P - T_s}{\Delta z_s} \right) \right] = 0 \quad (5.4)$$

となる。ここで小文字の n, s, w, e は CV の界面を表わす。() の中は各界面における熱流束に相当していることに注意しよう。これに面積をかけると面を通過する熱量になるが、たとえば、界面 e の面積は $\Delta z \times 2\pi r_e$ で与えられ、界面 s の面積は $\Delta r \times 2\pi r_p$ で与えられることを考えると、式(5.4)の各項は熱流束に界面の面積をかけて全体を 2π で割ったことに相当していることがわかる。つまり、式(5.4)の意味するところは、

$$[Q_e - Q_w] + [Q_n - Q_s] = 0 \quad (5.5)$$

と等価であり、界面を通じて入ってくる熱量と出ていく熱量が釣り合っているという当たり前のことを代数式で表現しているに過ぎないのである。

式(5.4)は P を中心として上下左右の 4 点、すなわち合計 5 点の温度についての代数的関係式である。こうした式をすべての CV に注目して立てていけば、未知数の個数と方程式の個数が一致して閉じた連立方程式系を得ることができる。つまり、その連立方程式を解けば、温度分布が領域全体にわたって得られることになる。

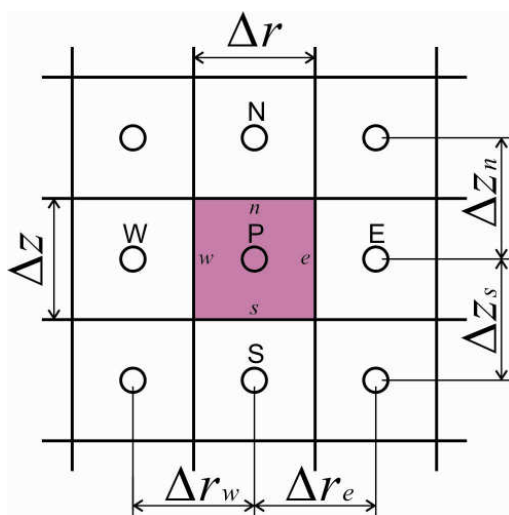


図 5.1 CV の分割と温度定義点

連立方程式を解くのは実は意外と大変である。本実験では、半径 r 方向に 102 分割、高さ z 方向に 176 分割して CV を配置しているので、未知数の個数 (=CV の個数) は 17952 個となる。もちろんこれだけの数の未知数をもつ連立方程式を手計算で解くのは絶対に不可能であるから、コンピュータに連立方程式を解かせるわけである。ただし、逆行列を求める方法や、消去法により未知数の数を減じていく方法によりこうした規模の大きい連立方程式を解くのはメモリや計算時間の効率が甚だ悪いため、繰り返し法(iterative method)により解を収束させる方法で解を得ている。

5.2 シミュレーション結果の整理と、考察において検討すべき事柄

シミュレーションの計算結果を配布するので、EXCEL 等を利用して、等温線を描く。さらに等温線と直交する熱流線を描く。

レポートにおいては以下の内容についての考察は**最低限**行うこと。

1. シミュレーションの結果からわかる温度分布の特徴や熱流れの特徴について論じること。特に異種材料(断熱材, アルミ)の影響や熱流れの次元(1次元, 2次元, 3次元)については詳しく考察すること。
2. 一次元理論から得られた温度分布, シミュレーションの結果得られた温度分布および実測値を比較せよ。特に実測値とシミュレーションの結果は完全に一致はしていないはずである。なぜ一致していないのか。シミュレーションの温度分布をより実測値に近づけるためにはどのようにすればよいか。
3. 一次元熱流れの理論, 温度計測, シミュレーションと 3 つのアプローチにはそれぞれ一長一短がある。それぞれにどのような長所・短所があるか考察せよ。その上で, 伝熱解析を行う際にはこれら 3 つのアプローチをどのように使えば有益な情報が得られるか

付録

～熱容量～

質量 m [kg], 比熱 c [J/(kg·K)] の物体の温度が ΔT [K] 上昇したとき, 物質に供給された熱量 Q [J] は次式で表わされる。

$$Q = mc\Delta T$$

物体を構成する物質の密度を ρ [kg/m³], 物体の体積を V [m³] とすれば,

$$Q = \rho Vc\Delta T$$

と表わすことができる。ここで $mc = \rho Vc$ [J/K] を**熱容量**といい, 物体の温度を 1[K] 上昇させるのに必要な熱量である。熱容量の大きい物体は温まりにくく, 冷めにくい。

～熱電対原理～

図 1 のような二種類の異なる金属導線を用いて閉回路を作り, 二つの接点に温度差が生じたとき両接点間に熱起電力が生じ回路に電流が流れる。これをゼーベック効果という。

熱電対はこの原理を利用したものであり, 発生した起電力の大きさから基準接点と測温接点の温度差を知ることができる。したがって基準接点の温度が既知ならば, 測温接点の温度が測定できる。今回使用する測定器は, 基準接点を作らなくても温度測定ができるよ

う補正回路が内蔵されているので、測温接点のみがあればよい。

熱起電力の大きさは材料の組み合わせによって異なり、図2に示すような組み合わせはJISなどで規格化されており、使用できる温度範囲や精度、使用条件などを考慮して適切な選定を行う必要がある。



図1 熱電対原理

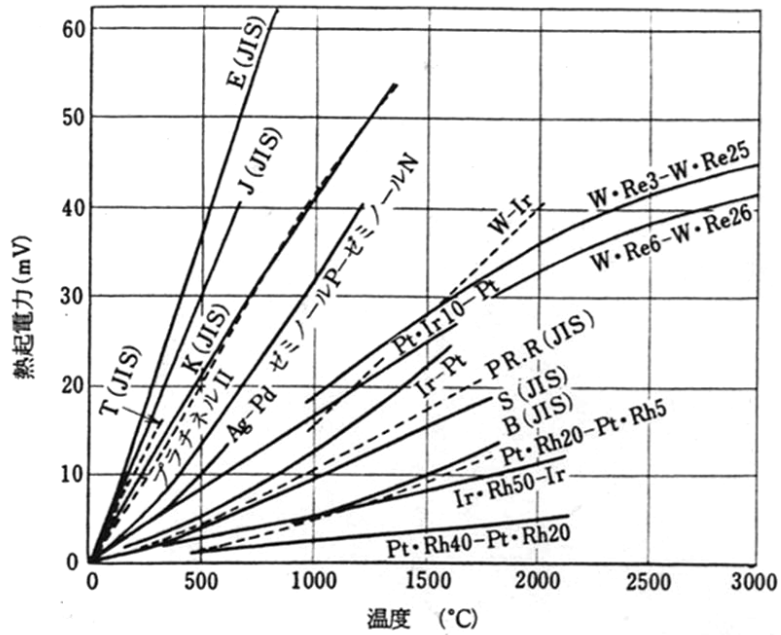


図2 各種熱電対の熱起電力の大きさ